Integrales singulares y fraccionarias locales en conjuntos abiertos

Oscar Salinas

2017

Estructura general

(X, d) espacio métrico con

- Propiedad de homogeneidad: Existe $N > 0$ tal que cada bola $B(x, r)$ no contiene más de N puntos cuyas distancias entre sí sean mayores $\frac{r}{2}$

Estructura general

(X, d) espacio métrico con

- Propiedad de homogeneidad: Existe $N > 0$ tal que cada bola $B(x, r)$ no contiene más de N puntos cuyas distancias entre sí sean mayores $\frac{r}{2}$
- $\Omega \subsetneq X$ abierto no vacío tal que las bolas contenidas en Ω son conexas.

En Ω

- Familias

$$\mathcal{F}_\beta = \{B = B(x_B, r_B) / x_B \in \Omega \text{ y } r_B < \beta d(x_B, \Omega^c)\} \quad 0 < \beta < 1$$

- Medida de Borel μ que satisface:

  i) $0 < \mu(B) < \infty \quad \forall B \in \mathcal{F} = \cup_\beta \mathcal{F}_\beta$
  ii) duplicante en cada $\mathcal{F}_\beta$, i.e.: existe C_β tal que $\mu(B) \leq C_\beta \mu(\frac{1}{2}B)$ para cada $B \in \mathcal{F}_\beta$

Ej.: $X = \mathbb{R}$, distancia usual, $\Omega = (0, \infty)$, $\quad d\mu = \frac{1}{x}\, dx$.

Objetivos principales

Estudiar acotaciones débiles y fuertes con un peso, en Ω, de

- Integrales fraccionarias β-locales:

$$I_\alpha^\beta f(x) = \int_{B(x,\beta d(x,\Omega^c))} \frac{f(y)}{\mu(B(x,d(x,y)))^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \qquad 0<\alpha<1$$

Objetivos principales

Estudiar acotaciones débiles y fuertes con un peso, en Ω, de

- Integrales fraccionarias β-locales:

$$I_\alpha^\beta f(x) = \int_{B(x,\beta d(x,\Omega^c))} \frac{f(y)}{\mu(B(x,d(x,y)))^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \qquad 0<\alpha<1$$

- β-localizaciones de integrales singulares, i.e.: operadores de la forma $T_\beta f(x) = T\big(f\mathcal{X}_{B(x,\beta d(x,\Omega^c))}\big)(x)$, donde T es una integral singular usual.

Antecedente directo

- 2014 (HSV) Acotaciones con un peso del operador:

$$M_{\mu,\beta}f(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{F}_B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| \, d\mu$$

<u>Aplicación:</u> estimaciones interiores de tipo Sobolev para soluciones de $\Delta^m u = f$ en $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$

- Dados $0 < \beta < 1$ y $1 < p, q < \infty$, decimos que una función no negativa pertenece a $A^{\beta}_{p,q}(\Omega)$ si

$$\sup_{B\in\mathcal{F}_\beta} \Big(\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega^q \, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega^{-p'} \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

Clases de pesos

- Dados $0 < \beta < 1$ y $1 < p, q < \infty$, decimos que una función no negativa pertenece a $A^{\beta}_{p,q}(\Omega)$ si

$$\sup_{B \in \mathcal{F}_\beta} \Big(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega^q \, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega^{-p'} \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

Para $p = 1$ y $1 \leq q < \infty$ el segundo factor se reemplaza por $\sup_B \omega^{-1}$ para definir la clase $A^{\beta}_{1,q}(\Omega)$.

Clases de pesos

- Dados $0 < \beta < 1$ y $1 < p, q < \infty$, decimos que una función no negativa pertenece a $A^{\beta}_{p,q}(\Omega)$ si

$$\sup_{B \in \mathcal{F}_\beta} \Big(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega^q \, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega^{-p'} \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

Para $p = 1$ y $1 \le q < \infty$ el segundo factor se reemplaza por $\sup_B \omega^{-1}$ para definir la clase $A^{\beta}_{1,q}(\Omega)$.

Obs: $A^{\beta}_{p,q}(\Omega)$ es independiente de $\beta \Rightarrow$ nos referimos a la clase como $A^{\mathrm{loc}}_{p,q}(\Omega)$.

Línea de resultados

1° Etapa

- Suponemos que X tiene la propiedad P:

  Existe $\sigma > 0$ tal que para cada $x_0 \in X, R > 0, y \in B(x_0, R)$ y $0 < r \leq 2R$ se puede encontrar z que verifica

Línea de resultados

1° Etapa

- Suponemos que X tiene la propiedad P:

  Existe $\sigma > 0$ tal que para cada $x_0 \in X, R > 0, y \in B(x_0, R)$ y $0 < r \leq 2R$ se puede encontrar z que verifica

$$B(z, \sigma r) \subset B(x_0, R) \cap B(y, r)$$

- Definición: operadores β-locales. Son operadores lineales T tales que $Tf(x) = 0$ si $B(x, \beta d(x, \Omega^c)) \cap \mathrm{sop}\ f = \emptyset$

- Definición: operadores β-locales. Son operadores lineales T tales que $Tf(x) = 0$ si $B(x, \beta d(x, \Omega^c)) \cap \text{sop } f = \emptyset$
- Definición: para $1 \leq p \leq q < \infty$

  i) T es (p, q)-localmente fuertemente acotado si

$$\|Tf\|_{L^q(B, \omega^q d\mu)} \leq C_{\omega,B} \|f\|_{L^p(B, \omega^p d\mu)}$$

  para todo $\omega \in A_{p,q}(B)$ y para toda bola B en $\mathcal{F}$.

- Definición: operadores β-locales. Son operadores lineales T tales que $Tf(x) = 0$ si $B(x, \beta d(x, \Omega^c)) \cap \text{sop } f = \emptyset$
- Definición: para $1 \leq p \leq q < \infty$

  i) T es (p, q)-localmente fuertemente acotado si

  $$\|Tf\|_{L^q(B,\omega^q d\mu)} \leq C_{\omega,B}\|f\|_{L^p(B,\omega^p d\mu)}$$

  para todo $\omega \in A_{p,q}(B)$ y para toda bola B en $\mathcal{F}$.

  ii) T es (p, q)-localmente débilmente acotado si

  $$\|Tf\|_{L^{q,\infty}(B,\omega^q d\mu)} \leq C_{\omega,B}\|f\|_{L^p(B,\omega^p d\mu)}$$

  para todo $\omega \in A_{p,q}(B)$ y para toda bola B en $\mathcal{F}$.

Teorema

Si (X, d) *cumple P, luego existe* $\beta_1 > 0$ *tal que todo operador* β*-local, con* $0 < \beta < \beta_1$*, que sea* (p, q) *localmente fuertemente acotado (localmente débilmente acotado) es acotado de* $L^p(\Omega, \omega^p\, d\mu)$ *en* $L^q(\Omega, \omega^q\, d\mu)\big(L^{q,\infty}(\Omega, \omega^q\, d\mu)\big)$ *para cualquier* $\omega \in A^{loc}_{p,q}(\Omega)$.

2° Etapa

- Eliminar el uso de la propiedad P

2° Etapa

- Eliminar el uso de la propiedad P
- Resultado de Macías y Segovia (1981):

  Existe una métrica δ equivalente a d tal que (X, δ) tiene la propiedad P

Resultados:

- Si T es una integral singular β-local con respecto a d para algún $\beta < \frac{1}{3}$, entonces con respecto a δ tenemos

Resultados:

- Si T es una integral singular β-local con respecto a d para algún $\beta < \frac{1}{3}$, entonces con respecto a δ tenemos

  i) es $\tilde{\beta}$-local para $\tilde{\beta} = 3\beta$

Resultados:

- Si T es una integral singular β-local con respecto a d para algún $\beta < \frac{1}{3}$, entonces con respecto a δ tenemos
  - i) es $\tilde{\beta}$-local para $\tilde{\beta} = 3\beta$
  - ii) es (p, p)-localmente fuertemente acotada con pesos $A_{p,p}$ de cada bola, $1 < p < \infty$

Resultados:

- Si T es una integral singular β-local con respecto a d para algún $\beta < \frac{1}{3}$, entonces con respecto a δ tenemos
  i) es $\tilde{\beta}$-local para $\tilde{\beta} = 3\beta$
  ii) es (p, p)-localmente fuertemente acotada con pesos $A_{p,p}$ de cada bola, $1 < p < \infty$
  iii) es $(1, 1)$-localmente débilmente acotada con pesos $A_{1,1}$ de cada bola

Resultados:

- Si T es una integral singular β-local con respecto a d para algún $\beta < \frac{1}{3}$, entonces con respecto a δ tenemos
  - i) es $\tilde{\beta}$-local para $\tilde{\beta} = 3\beta$
  - ii) es (p, p)-localmente fuertemente acotada con pesos $A_{p,p}$ de cada bola, $1 < p < \infty$
  - iii) es $(1, 1)$-localmente débilmente acotada con pesos $A_{1,1}$ de cada bola

Teorema

Si $0 < \beta < \frac{\beta_1}{3}$, cualquier integral singular β-local en (X, d, Ω, μ) es acotada sobre $L^p(\Omega, \omega^p\, d\mu)$, $1 < p < \infty$, para $\omega \in A_{p,p}^{loc}(\Omega)$ y de tipo débil $(1, 1)$ para pesos en $A_{1,1}^{loc}(\Omega)$.

- Si I_α^β es una integral fraccionaria β-local con respecto a d para algún $\beta < \frac{1}{3}$, entonces

- Si I_α^β es una integral fraccionaria β-local con respecto a d para algún $\beta < \frac{1}{3}$, entonces

  i) $I_\alpha^\beta f(x) \leq C\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}} f(x) \quad \tilde{\beta} = 3\beta$ para $\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}}$ integral fraccionaria $\tilde{\beta}$-local con respecto a δ.

- Si I_α^β es una integral fraccionaria β-local con respecto a d para algún $\beta < \frac{1}{3}$, entonces

  i) $I_\alpha^\beta f(x) \leq C \tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}} f(x) \quad \tilde{\beta} = 3\beta$ para $\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}}$ integral fraccionaria $\tilde{\beta}$-local con respecto a δ.

  ii) $\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}}$ es (p, q)-localmente fuertemente acotada para $1 < p < \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, para pesos en la clase $A_{p,q}$ de cada δ-bola.

- Si I_α^β es una integral fraccionaria β-local con respecto a d para algún $\beta < \frac{1}{3}$, entonces

    i) $I_\alpha^\beta f(x) \leq C\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}} f(x)$ $\quad \tilde{\beta} = 3\beta$ para $\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}}$ integral fraccionaria $\tilde{\beta}$-local con respecto a δ.

    ii) $\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}}$ es (p,q)-localmente fuertemente acotada para $1 < p < \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, para pesos en la clase $A_{p,q}$ de cada δ-bola.

    iii) $\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}}$ es $(1, 1 - \frac{1}{\alpha})$-localmente débilmente acotada para pesos en $A_{1,1-\frac{1}{\alpha}}$ de cada δ-bola

- Si I_α^β es una integral fraccionaria β-local con respecto a d para algún $\beta < \frac{1}{3}$, entonces
  1. i) $I_\alpha^\beta f(x) \leq C\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}} f(x) \quad \tilde{\beta} = 3\beta$ para $\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}}$ integral fraccionaria $\tilde{\beta}$-local con respecto a δ.
  2. ii) $\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}}$ es (p,q)-localmente fuertemente acotada para $1 < p < \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, para pesos en la clase $A_{p,q}$ de cada δ-bola.
  3. iii) $\tilde{I}_\alpha^{\tilde{\beta}}$ es $(1, 1 - \frac{1}{\alpha})$-localmente débilmente acotada para pesos en $A_{1,1-\frac{1}{\alpha}}$ de cada δ-bola

Teorema

Si $0 < \beta < \frac{\beta_1}{3}$, las integrales fraccionarias I_α^β son acotadas de $L^p(\Omega, \omega^p\, d\mu)$ en $L^q(\Omega, \omega^q\, d\mu)$ con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha, 1 < p < \frac{1}{\alpha}$, para $\omega \in A_{p,q}^{loc}(\Omega)$, y de tipo débil $(1, 1 - \frac{1}{\alpha})$ sobre Ω para pesos en $A_{1,1-\frac{1}{\alpha}}^{loc}(\Omega)$.

3° Etapa

- Lograr acotaciones para $0 < \beta < 1$

3° Etapa

- Lograr acotaciones para $0 < \beta < 1$
- Técnica: controlar puntualmente un operador T por la suma de dos, digamos T_0 y T_1, donde T_0 es un β_2-local, con β_2 pequeño, y T_1 es uno que se puede controlar por una maximal. Luego:

3° Etapa

- Lograr acotaciones para $0 < \beta < 1$
- Técnica: controlar puntualmente un operador T por la suma de dos, digamos T_0 y T_1, donde T_0 es un β_2-local, con β_2 pequeño, y T_1 es uno que se puede controlar por una maximal. Luego:
    - a T_0 se le aplica el resultado de la etapa anterior

3° Etapa

- Lograr acotaciones para $0 < \beta < 1$
- Técnica: controlar puntualmente un operador T por la suma de dos, digamos T_0 y T_1, donde T_0 es un β_2-local, con β_2 pequeño, y T_1 es uno que se puede controlar por una maximal. Luego:
  - a T_0 se le aplica el resultado de la etapa anterior
  - a T_1 se lo acota a través de la maximal (resultados del artículo anterior).

Teorema

Si T es una integral singular β-local, $0 < \beta < 1$, luego T está acotada en $L^p(\Omega, \omega^p\, d\mu), 1 < p < \infty$, para $\omega \in A^{loc}_{p,p}(\Omega)$ y es de tipo débil $(1,1)$ para $\omega \in A^{loc}_{1,1}(\Omega)$.

Teorema

Si T es una integral singular β-local, $0 < \beta < 1$, luego T está acotada en $L^p(\Omega, \omega^p \, d\mu), 1 < p < \infty$, para $\omega \in A^{loc}_{p,p}(\Omega)$ y es de tipo débil $(1,1)$ para $\omega \in A^{loc}_{1,1}(\Omega)$.

Teorema

El operador I^{β}_{α}, $0 < \alpha, \beta < 1$, es acotado de $L^p(\Omega, \omega^p \, d\mu)$ en $L^q(\Omega, \omega^q \, d\mu)$ con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, para $\omega \in A^{loc}_{p,q}(\Omega)$, y es de tipo débil $(1, \frac{1}{1-\alpha})$ para $\omega \in A^{loc}_{1,\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)$.

Aplicaciones

- Acotaciones de T_β definida por $T_\beta f(x) = T\big(f\mathcal{X}_{B(x,\beta d(x,\Omega^c))}\big)(x)$

Aplicaciones

- Acotaciones de T_β definida por $T_\beta f(x) = T\big(f\mathcal{X}_{B(x,\beta d(x,\Omega^c))}\big)(x)$
- Inmersiones de espacios de Sobolev

  En $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue, $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, $\rho(x) = d(x,\Omega^c)$ definimos

$$W^{1,p}_{\rho,\omega}(\Omega) = \big\{f \in L^p(\Omega,\omega^p\,dx)/|\nabla f| \in L^p(\Omega,\rho^p\omega^p\,dx)\big\}\; 1 < p < \infty$$

con $\|f\|_{W^{1,p}_{\rho,\omega}} = \|f\|_{L^p(\Omega,\omega^p\,dx)} + \|\nabla f\|_{L^p(\Omega,\rho^p\omega^p\,dx)}$
Si $\omega \in A^{\mathrm{loc}}_{p,q}(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, $1 < p < n$, $W^{1,p}_{\rho,\omega}(\Omega)$ está continuamente inmerso en $L^q(\Omega,\rho^q\omega^q\,dx)$.

Gracias!